

↓ А/обучено 10/10/2024

Правило множителей Лагранжа д/выпукл. задач
Речь пойдет о важном в идеалистическом плане прие-
ме „снятия оранич-й“, а был предложен Лагранжем
и а часто в его честь называют принципом Лагранжа
Как будет видно, в конструкции правила множ-пей
Лаз. просматриваются родственные черты с мет. штра-
фов.

✗ следующ. (не самый общий) класс задач: $U(u) \rightarrow \inf$,
 $u \in U \subset \mathbb{R}^n$, $U = \{u \in U_0 \mid g_1(u) \leq 0, \dots, g_m(u) \leq 0\}$ (1). Здесь L -принцип
вол. мин. пр-во $\forall$ размер-ти, даже не обязательно тополо-
гическое. Предполагается выполненным следующ. основное

предполож-е выпукл-ти: $f(u), g_1(u), \dots, g_m(u)$ — вып. ф-ции,
 U_0 вып. мн-во (2)

Предлож-е Лаг — ввести ф-цию (ее называют ф-цией Лаг)
перемен (u, λ) , $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ следующего вида: $L(u, \lambda) = \lambda_0 f(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(u)$, $u \in U_0$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^{m+1} = \{ \lambda \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \lambda \geq 0 \}$

Сформулируем J , содержащ. необх. и дост. усл-я оптим-ти
эл-та u_* в зад. (1)

$J_{2.5}$ зад. (1) вып. в смысле (2). Тогда if $u_* \in U_*$, то необх-
димо $\exists$ набор множителей Лагранжа $\lambda^* \neq 0$, $g/d \min_{u \in U_0} L(u, \lambda^*)$
 $f = L(u_*, \lambda^*)$ (принцип min) (a), $\lambda_i^* \geq 0$, $i = \overline{0, m}$ (принцип неотриц. множит-
елей) (b), $\lambda_i^* g_i(u_*) = 0$, $i = \overline{1, m}$ (усл-я дополняющ. жесткости) (c)

Обратно, if $\exists$ некое пары (u_*, λ^*) вып-ся усл-я (a)–(c), при-
чем $u_* \in U$ (эл-т u_* явл-ся допустимым), а $\lambda_0^* \neq 0$, то $u_* \in U_*$,
т.е. эл-т u_* явл-ся оптимальн. р-м-м зад. (1)

▲ Базовым инструментом дока-ва будет простейшая
 J обделенности т. от непустого вып. мн-ва в конечно-
мерн. пр-ве. Само утв. будет сформулировано ниже (J от-
деленности можно д-ть или заменить в Васильев Ф.П. "МО": в
2-х книгах, М., МЦЭМО, 2011, кн. 1, гл. II, §5)

$\Rightarrow$ Нам будет удобнее считать, что $f(u_*) = 0$. Достоверность
(d) не явл-ся огранич-м общ-ти, т.к. от $f(u)$ можно перейти
к функц-лу $\tilde{f}(u) = f(u) - f(u_*)$ со сдвинутыми на const ве-
личинами $f(u_*)$ знач-ми. К таким св-м утв. (a) безразлично,
а в (b) и в (c) функц-л $f(u)$ вообще не присутствует. $\&$ в
пр-ве $\mathbb{R}^{n+1}$ спец. мн-во $M = \{ \mu \in \mathbb{R}^{m+1} : \exists u \in U_0 : f(u) \leq \mu_0, \dots, g_i(u) \leq \mu_i, i = \overline{1, m} \}$
мн-во M непусто. Действительно, ему принадлежат, в

мастности, все точки μ с положит. коорд.-ми $\mu_i > 0$, $i = \overline{0, m}$, d/d в силу принятой договоренности (d) подходящей т. из U_0 может служить оптимальным решением $u_* \in U_*$ с $u_* \in U_0$.

Мн-во M вып. Это св-во легко проверяется по определению с помощью основн. предполож-я (2).

Кроме того, $0 \notin M$, т.к. в противном случае нашлось бы допустимый эл-т $u \in U$ с меньшим по сравнению с u_* значением функционала J , что противоречило бы принятой договоренности (d).

С учетом перечисленных св-в мн-ва M его можно представить в виде U_0 и принадлежущую ему т. 0 можно разделить проходящей через 0 гиперпл-тью с норм. в-ром $\vartheta^* \neq 0$: $\langle \vartheta^*, \mu \rangle_{\mathbb{R}^{m+1}} \geq 0 = \langle \vartheta^*, 0 \rangle_{\mathbb{R}^{m+1}}$, $\forall \mu \in M$ (3).

Пользуясь имеющимся в (3) произволом в выборе μ , подставим в (3) содержащиеся во мн-ве M эл-ты $\mu^\varepsilon(i) = (\varepsilon, \dots, \varepsilon, 1, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, у d знач-е 1 занимает i -ую позицию. Переходя к $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0}$, получим норм. в-во $\vartheta_i^* \geq 0$. Номер $i = \overline{0, m}$ был нами выбран произвольно, поэтому соотнош-я неотриц-ти (b) доказаны.

If d /некот. номера $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ i -ое ограничение активно, т.е. $d_i(u_*) = 0$, то соответствующее усл-е $\vartheta_i^* d_i(u_*) = 0$ из списка (c) выпол-ся тривиал. образом. $\neq$ $\forall$ из пассивных ограничений, d/d $d_i(u_*) < 0$, и сформируем d /него семейство эл-тов $\mu^\varepsilon(i) = (\varepsilon, 0, \dots, 0, d_i(u_*), 0, \dots, 0) \in M$, $\varepsilon > 0$, у d знач-е $d_i(u_*)$ занимает i -ую позицию. Точкой, подтверждающей принадлеж-ть $\mu^\varepsilon(i) \in M$, будет, например, эл-т $u_* \in U_*$ с U_0 , d/d $J(u_*) =$

$= 0 < \varepsilon$, $g_j(u_*) \leq 0$, $j \neq i$, а $g_i(u_*) = g_i(u_*)$. Подставляя такие $u^{\varepsilon}(i)$ в (3) и устремляя $\varepsilon \rightarrow +0$, получим нер-во $\Delta_i^* g_i(u_*) \geq 0$. Мы исходим из того, что $g_i(u_*) \leq 0$, поэтому $\Delta_i^* \leq 0$, а тогда в силу уже доказанного св-ва (б) получаем, что $\Delta_i^* = 0$. Тем самым, справедливость усл-й дополняющ. нежестк-ти установлена д/всех номеров $i = \overline{1, m}$.

А/дек-ва принципа min (а) фикс. произвол. т. $u \in U_0$, рассматриваем соответствующ. ей семейство эл-тов $u^{\varepsilon}(u) = (J(u) + \varepsilon, g_1(u), g_2(u), \dots, g_m(u)) \in M$, $\varepsilon > 0$, и подставим их в (3). После перехода к $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0}$ получим нер-во $L(u, \Delta^*) \geq 0$, $\forall u \in U_0$, а, с учетом того, что $J(u_*) \stackrel{a)}{=} 0$ и $\Delta_i^* g_i(u_*) \stackrel{a)}{=} 0$, $i = \overline{1, m}$, превращ-ся в (а).

$\Rightarrow$ Исходим из того, что $u_* \in U$, $\Delta_0^* > 0$ и выполнены усл-я (2), (а) - (с). Без огранич-я общ-ти будем считать, что $\Delta_0^* = 1$. Тогда $J(u_*) \stackrel{a)}{=} J(u_*) + \sum_{i=1}^m \Delta_i^* g_i(u_*) = L(u_*, \Delta^*) \stackrel{a)}{\leq} L(u, \Delta^*) = J(u) + \sum_{i=1}^m \Delta_i^* g_i(u) \leq J(u)$, $\forall u \in U \Rightarrow u_* \in U^*$. Последнее нер-во в дан-ной цепочке выпол-ся в силу (б) и включ-я $u \in U$.

! Зам. 1 В T_{25} $\times$ зад. вида (8), в записи Δ отсутствуют огранич-я типа рав-ва: $g_i(u) = 0$, $i = \overline{m+1, m+s}$ (н). Формально их можно было бы включить в состав мн-ва U_0 , однако требование вып-ти, принципиальное д/ T_{25} , в $\forall$ случае фактически связывало бы ф-ции $g_i(u)$, $i = \overline{m+1, m+s}$, быть линейными. Мн. огранич-я-рав-ва (н) мо бы явно вклю- чить в постановку зад. (1), приписать им допол. мнот-ти Лаг. Δ_i , $i = \overline{m+1, m+s}$, не являющ-ся знакоопределенными, и тогда T_{25} по сущ-ву осталась бы в силе. (соответствующ. формулировки можно найти в книге Васильев Ф.П. "МО" и в

Сухарев А. Г., Тимохин А. В., Федоров В. В. "Курс МО", М., Физматлит, 2005)

Случай, когда $\lambda_0^* > 0$ ($\lambda_0^* = 1$) и ф-ция Лаг. принимает класс. вид $L(u, \lambda) = J(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(u)$, принято наз-ть регулярным. К сожалению, регуляр. ав-ся далеко не все оптимиз. зад. вида (1)

Пример (нерегуляр. зад.)

* след. одномер. зад. ав-н. $J(u) = -u \rightarrow \inf, u \in U = \{u \in \mathbb{R}^1 \mid \varphi(u) = u^2 \leq 0\}$, принадлежащ. классу (2) вып. задач. У этой зад. ! оптим. реш-м ав-ся ! допустим. т. $u_* = 0$.

По $J_{2.5}$ д/ нее найдется нетривиал. набор множит-й Лаг.

$\lambda^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*)$, д/ л пара (u_*, λ^*) удовл. усл-м (a)-(c). J

$\lambda^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*)$ — $\forall u$ таких наборов. Запишем усл-е (a):

$-\lambda_0^* u + \lambda_1^* u^2 \geq -\lambda_0^* u_* + \lambda_1^* u_*^2 = 0, \forall u \in U_0 = \mathbb{R}^1$. Пользуясь

произвол. в выборе u , делаем вывод о том, что $\lambda_1^* > 0$

верно кер-во $-\lambda_0^* + \lambda_1^* u \geq 0$, а тогда, устремляя $u \rightarrow +0$,

приходим к кер-ву $-\lambda_0^* \geq 0$, а с учетом неотриц-ти $\lambda_0^* \geq 0$

приводит к рав-ву $\lambda_0^* = 0$ д/ л набора множит-й Лаг.

Поскольку с нерегуляр. задачами, в л $\lambda_0^* = 0$ и ф-ция

$J(u)$ остается "не в дей", иметь дело не очень приятно,

хотелось бы иметь какие-то дост. усл-я регуляр-ти, за-

рактирующие нетривиал-ть главного множителя Лаг.

λ_0^* . Одним из них ав-ся так называемое достаточ.

усл-е Регуляр-ти Слейтера: $\square$ в зад. (1), вып-й в смыс-

ле (2), $\exists u_0 \in U_0: g_i(u_0) < 0, \forall i = 1, \dots, m$ (3). Тогда в U наборе

множит-й Лаг. λ^* , удовлетворяющем в паре с эл-том

u_* усл-м (a)-(c), обязательно $\lambda_0^* > 0$

Факт-во легко проверить от противного: if бы в некоем най-
 множестве-й Лал. $\lambda^* \neq 0$ из J_{25} компонента $\lambda_0^* = 0$, то в
 линейной т. u_0 из (5) выполнял-ся бы строгое нер-во $L(u_0, \lambda^*)$
 $= 0$. $\mathcal{L}(u_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(u_0) < 0$, поскольку среди λ_i^* есть хотя бы 1
 положит. множитель, а все $g_i(u_0)$ отриц. в силу (5).
 С друг. стороны, из (5) и из того, что $\lambda_0^* = 0 \Rightarrow 0 = L(u_*, \lambda^*)$.
 Получ-ся, что $L(u_0, \lambda^*) < L(u_*, \lambda^*)$, а это противоречит
 принципу $\min$ (a)

В регуляр вып. случае правило множ-й Лал часто
 формулируют в другой весьма распространенной форме
 — в терминах седловой т. ф-ции Лал. — и называют J
 Куна-Таккера.

Опр X и Y — 2 произвол. мн-ва и $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^1$ — ф-ция,
 определенная на их декартов. произведении. Т. $(x^*, y^*) \in X \times Y$
 наз-ся седловой т. ф-ции f на мн-ве $X \times Y$, if $f(x^*, y) \leq$
 $\leq f(x^*, y^*) \leq f(x, y^*)$, $\forall x \in X, \forall y \in Y$.

J_{26} (Куна-Таккера) $\Rightarrow$ выполнены усл-я J_{25} и усл-я
 регуляр-ти Слейтера (5). Тогда д/оптим-ти эт-та u^*
 в зад. (1) необход. и дост., чтобы классич. ф-ция Лал. с $\lambda_0 = 1$
 имела седловую т. $(u^*, \lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*))$ на мн-ве $U_0 \times \mathbb{R}_+^m$.

▲ Запишем седлов. нер-ва д/классич. ф-ции Лал. $\mathcal{L}(u) +$
 $+ \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(u) \leq \mathcal{L}(u^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(u^*) \leq \mathcal{L}(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(u)$, $\forall u \in U_0$,
 $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^m$ (5)

$\Rightarrow \exists u^* \in U_*$, т.е. т. u^* явл-ся оптимальн. реш-м зад. (1). Тогда
 с учетом дост. усл-я регуляр-ти (5) утв. (a) J_{25} превраща-ся в
 прав. нер-во (5). Усл-я дополнит. нежестк-ти (с) право-
 дат к рав-ву $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(u^*) = 0$, а т.к. $\lambda_i \geq 0$ и $g_i(u^*) \leq 0$, $i = 1, m$,

то $\sum_{i=1}^m g_i(u_*) \leq 0 \Rightarrow$ лев. нер-во (5) тоже выпол-ся
 $\Leftrightarrow \exists$ в некот. m . $u_* \in U_0$ при некот. $\lambda^* \geq 0$ выполнены
 седлов. нер-ва (5). Тогда из лев. нер-ва (5) имеем $\sum_{i=1}^m (\lambda_i - \lambda_i^*) \cdot$
 $g_i(u_*) \leq 0, \forall \lambda \geq 0$. (6)

Фикс. некот. $\varepsilon > 0$ и подставим в (6) в-р $\lambda = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_{i-1}^*,$
 $\lambda_i^* + \varepsilon, \lambda_{i+1}^*, \dots, \lambda_m^*) \geq 0$. Нер-во (6) примет вид $\varepsilon g_i(u_*) \leq 0$,
 значит, $g_i(u_*) \leq 0$, а т.к. это верно $\forall i = \overline{1, m}$, то $u_* \in U$, т.е.
 эл-т u_* явл-ся допустимым в зад (1). If подставить в
 (6) в-р $\lambda = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_{i-1}^*, \lambda_i = 0, \lambda_{i+1}^*, \dots, \lambda_m^*) \geq 0$, получим
 нер-во $-\lambda_i^* g_i(u_*) \leq 0$. Учитывая, что $\lambda_i^* \geq 0$ и $g_i(u_*) \leq 0$,
 приходим к рав-ву $\lambda_i^* g_i(u_*) = 0$, справедливому $\forall$
 $i = \overline{1, m} \Rightarrow$ усл-я (с) выполн-ся

Теперь можно воспол-ся утв-м $\Gamma_{2.5}$ в направлении
 дост-ти, т.к. нам известно, что $\lambda_0^* = 1, u_* \in U$ и выполнены
 усл-я (a)-(c). В рез-те получаем, что $u_* \in U_*$ ■